$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^t = I^t = I$

$(A^{-1})^t A^t = I \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Φυλλάδιο 1 ασκ 9

$A^4 - A^3 + A^2 - A + I = 0$

$I = -A^4 + A^3 - A^2 + A$

$I = A\underbrace{(-A^3 + A^2 - A + I)}_{A^{-1}}$

αυτό $AA^{-1} = I$

$A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I$

$-A^4 = -A^3 + A^2 - A + I$

$A^{-1} = -A^4$

ασκ 10

$\exists A^{-1}, \exists B^{-1}, \exists (A+B)^{-1}$

Να βρεθεί ο $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$

$(A^{-1}+B^{-1}) \cdot A(A+B)^{-1}B = I$

Γραμμοπράξεις - Στοιχειώδεις πίνακες

Με αυτές τις έννοιες υπολογίζουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό ενός πίνακα A.

Θεώρημα: Αν δοθεί πίνακας A υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_k$ τ.ω. $E_k \cdots E_1 A = R$ ανηγμένος κλιμακωτός.

Πόρισμα: Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C ώστε $CA = R$ ανηγμένος κλιμακωτός.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο $R = \underbrace{E_k \cdots E_1}_{\text{στοιχειώδεις πίνακες} \Rightarrow \text{αντιστρέψιμοι}} A$ $\quad C = E_k \cdots E_1 \quad C^{-1} = (E_k \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$

Πόρισμα: Αν ο A είναι τετραγωνικός τότε είναι αντιστρέψιμος ανν είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Απόδειξη: Έστω A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists A^{-1}$ $\quad A^{-1}A = I = AA^{-1}$.
Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C ώστε $CA = R$ ανηγμένος κλιμακωτός.

$CAA^{-1} = RA^{-1} \Rightarrow C = RA^{-1} \Leftrightarrow AC = R$

αντίστροφος, δεν αντιστρέφεται

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & \alpha\beta\gamma & \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Downarrow$

$A^{-1} = C$ γιατί $R = I$

Άρα ο R είναι ο ταυτοτικός $I_{n \times n}$

"$\Leftarrow$": Έστω ότι ο ανηγμένος κλιμακωτός R του A είναι ο ταυτοτικός

$I = R = E_k \cdots E_1 A \Rightarrow E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} I = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$

$E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} = A \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα γράφουμε τον A κ' τον I κ' ότι γραμμοπράξεις κάνουμε στον A εφαρμόζουμε τις ίδιες κ' στον I μέχρι να καταλήξουμε στον κλιμακωτό=ανηγμένο πίνακα.

Ορισμός: Η τάξη-βαθμίδα-rank ενός πίνακα A, rankA είναι το πλήθος των ηγετικών μονάδων του ανηγμένου κλιμακωτού του A.

π.χ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} \sim \text{ανηγμένος κλιμακωτός} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}A=2$$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{rank} I_{n\times n}=n$$

Ένας πίνακας αντιστρέφεται ανν το rank του είναι n

Πρόταση: Αν ο A είναι $m\times n$ τότε $\text{rank}A \le \min(m,n)$

Απόδειξη:

m-γρ.

n-στηλ.

Επειδή σε κάθε γραμμή μπορεί να έχει το πολύ μία μονάδα κ' αυτή βρίσκεται δεξιά της προηγούμενης. Θα έχει το πολύ m μονάδες. Επίσης τα ηγετικά στοιχεία είναι προς τα δεξιά, κάθε φορά θα βρίσκονται σε διαφορετική στήλη. Άρα θα είναι το πολύ όσες οι στήλες. Άρα $\text{rank}A \le \min\{m,n\}$

Στηλοπράξεις-Στοιχειώδεις πίνακες

ΠΡΟΣΟΧΗ Δεν κάνουμε στηλοπράξεις σε συστήματα

A τυχαίος πίνακας $\xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}}$ R ανηγμένο κλιμακωτό π.χ.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ανηγμένος κλιμακωτός

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ rank $R = 2 =$ rank R'

Στηλοπράξεις

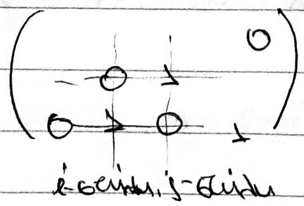
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{4,1}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{4,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

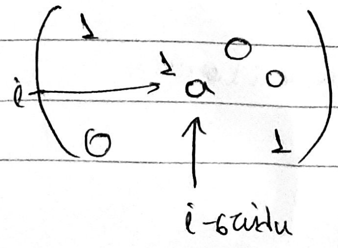
Ορισμός: Δύο πίνακες καλούνται στηλοϊσοδύναμοι αν ο ένας προέρχεται από τον άλλον με στοιχειώδεις στηλοπράξεις.
Όπως κ' στις γραμμοπράξεις έτσι κ' στις στηλοπράξεις υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι όταν πολ/ζουν από δεξιά τον πίνακα δημιουργούν την αντίστοιχη στηλοπράξη.

Τους στοιχειώδεις πίνακες στηλών τους συμβολίζουμε με τη βοήθεια του I

$E'_{i,j} = E_{i,j}$



$M'_i(a) = M_i(a)$



$A'_{i,j}(a)$ = ο πίνακας ο οποίος πολλ/ζει την j-στήλη του A με a κ' την προσθέτει στην i-στήλη

$$A'_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 \; a & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A'_{i,j}(a))^t = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{i,j}(a)$$

i-στήλη j-στήλη

i-γραμμή j-γραμμή

$B A'_{i,j}(a)$ για στήλες

$(B A'_{i,j}(a))^t$ για γραμμές

$(A'_{i,j}(a))^t B^t$

γραμμές = στήλες του B

<u>Θεώρημα:</u> Αν σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό R εφαρμόσουμε στηλοπράξεις, τότε αυτός θα έρθει στη μορφή $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ με $r = \operatorname{rank} R$

<u>Πόρισμα:</u> Υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1', \dots, E_l'$ ώστε ένας ανηγμένος κλιμακωτός R να γίνεται $R E_1' E_2' \dots E_l' = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ με $r = \operatorname{rank} R$

<u>Πόρισμα:</u> Αν δοθεί ένας πίνακας A με $\operatorname{rank} A = r$, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες Q κ' P ώστε $QAP = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Απόδειξη:</u> Βρίσκουμε τον Q χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες για γραμμές

ανηγμένος κλιμακωτός $R = E_k \dots E_1 A$

Q

$$R \underbrace{E_1' \dots E_l'}_{P} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Δύο πίνακες A κ' B καλούνται ισοδύναμοι, αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες Q κ' P ώστε $B = QAP$ ή $A = QBP$

Πόρισμα: Κάθε πίνακας A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα μορφής $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ όπου $r = \operatorname{rank} A$

Ορισμός: Δύο πίνακες A κ' B καλούνται όμοιοι, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q ώστε $B = QAQ^{-1}$ ή $A = QBQ^{-1}$